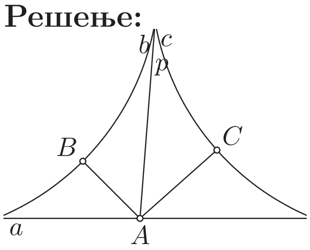
14. Нека су a, b и c међусобно паралелне праве, али не све у истом смеру. Нека су b' и c' управне из тачке A праве a на правама b и c. Одредити угао између правих b' и c'.

Решење:



Нека је Ap полуправа с теменом A која је паралелна правима b, c и нека су B, C редом подножја нормала из тачке A на правима b, c.

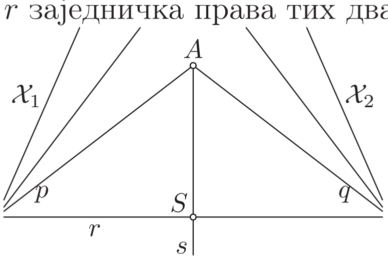
По дефиницији, углови које полуправа Ap и она полуправа праве a с теменом A, која је паралелна правој b, заклапају с полуправом AB јесу углови паралелности за дужину BA (јер су оне паралелне правој b из тачке A), па су међусобно подударни. Означимо их са φ.

Такође, по дефиницији, углови које полуправа Ap и она полуправа праве a с теменом A, која је паралелна правој c, заклапају с полуправом AC јесу углови паралелности за дужину CA (јер су оне паралелне правој c из тачке A), па су међусобно подударни. Означимо их са ψ.

Угао између правих b', c' је $\measuredangle BAC = \varphi + \psi$, а пошто је $180^\circ = \varphi + \varphi + \psi + \psi = 2(\varphi + \psi)$, следи да је $\varphi + \psi = 90^\circ$. Према томе, праве b', c' су међусобно нормалне.

15. Два разна параболичка прамена имају заједничку праву. Доказати.

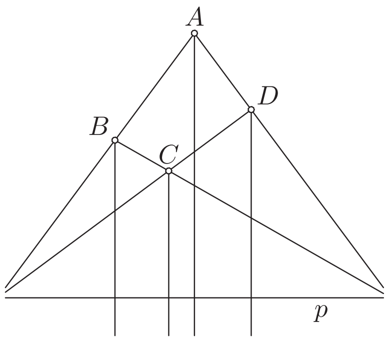
Решење: Нека су $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ два разна параболичка прамена. Нека је A произвољна тачка у равни и нека је Ap полуправа која је паралелна свим правима прамена $\mathcal{X}_1$ и Aq полуправа која је паралелна свим правима прамена $\mathcal{X}_2$. Ако полуправе Ap, Aq припадају једној правој r, онда је права r заједничка права тих двају праменова.



Ако полуправе Ap, Aq не припадају једној правој, нека је онда полуправа As бисектриса угла $\measuredangle pAq$, S тачка бисектрисе As таква да је $AS = \Pi^{-1}(\measuredangle sAp)$ и r права која садржи S и нормална је на As. Како је $\measuredangle SAp = \Pi(SA)$ угао паралелности тачке A у односу на праву r, следи да је r паралелна полуправој Ap, па припада прамену $\mathcal{X}_1$. Како је As бисектриса угла $\measuredangle pAq$, следи да је $\measuredangle sAp = \measuredangle sAq$, па је $\measuredangle sAq = \Pi(SA)$, што значи да је права r паралелна и полуправој Aq. Следи да права r припада прамену $\mathcal{X}_2$, па је права r заједничка права тих двају праменова.

16. Нека су A, B, C, D тачке такве да су редом полуправе AB и DC, односно BC и AD паралелне. Доказати да су симетрале унутрашњих углова код темена A и C и спољашњих углова код темена B и D праве истог прамена.

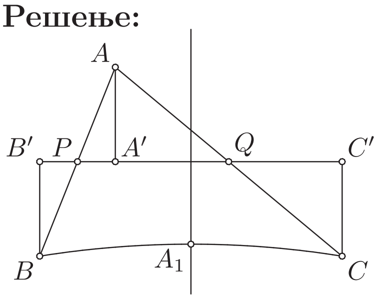
Решење:



Нека је $\mathcal{X}_1$ прамен правих које су паралелне полуправима AB, DC и нека је $\mathcal{X}_2$ прамен правих које су паралелне полуправима BC, AD. Праменови $\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2$ су параболички, па на основу претходног задатка они имају заједничку праву p. Краци спољашњег угла код темена B су полуправе с теменом B паралелне правој p, па следи да је симетрала тог угла нормална на правој p. Такође, краци спољашњег угла код темена D су полуправе с теменом D које су паралелне правој p, па следи да је симетрала тог угла нормална на правој p. Полуправе AB, AD с теменом A су паралелне правој p, па је симетрала угла $\measuredangle BAD$ (унутрашњег угла код темена A) нормална на правој p. Коначно, угао унакрсан углу $\measuredangle BCD$ (унутрашњем углу код темена C) има краке који су полуправе с теменом C паралелне правој p, па је његова симетрала (која је уједно и симетрала унутрашњег угла код темена C) нормална на правој p. Дакле, све четири симетрале су нормалне на правој p, те припадају хиперболичком прамену правих чија је основица права p.

17. Доказати да за три неколинеарне тачке A, B, C важи
$\Pi(\frac{BC}{2}) < \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$.

Решење:



Нека су, као у 5. задатку, P, Q средишта страница AB, AC троугла $\triangle ABC$ и нека су A', B', C' редом подножја нормала из тачака A, B, C на правој PQ. Нека је A_1 средиште странице BC и нека је m њена медијатриса. У 5. задатку смо доказали да је четвороугао $C'B'BC$ Сакеријев, па је медијатриса његове противосновице BC нормална на $B'C'$. Како је полуправа BB' хиперпаралелна медијатриси m, јер им је права $B'C'$ заједничка управна, по дефиницији угла паралелности следи да је $\Pi(A_1B) < \measuredangle A_1BB'$. Дакле, $\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \measuredangle CBB'$. Треба још само израчунати угао $\measuredangle CBB'$.

Јасно је да је $\measuredangle CBB' = \measuredangle CBP + \measuredangle PBB'$ и $\measuredangle CBB' = \measuredangle BCC' = \measuredangle BCQ + \measuredangle QCC'$. У 5. задатку смо доказали да је $\measuredangle PBB' = \measuredangle PAA'$ и $\measuredangle QCC' = \measuredangle QAA'$. Следи да је

$$\begin{aligned} 2\measuredangle CBB' &= \measuredangle CBB' + \measuredangle BCC' = \measuredangle CBA + \measuredangle PAA' + \measuredangle BCA + \measuredangle QAA' \\ &= \measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC, \end{aligned}$$

па је $\measuredangle CBB' = \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$. Према томе, важи да је $\Pi\left(\frac{BC}{2}\right) < \frac{1}{2}(\measuredangle ABC + \measuredangle ACB + \measuredangle BAC)$.

18. Ако је у равни Лобачевског дат троугао ABC код кога је $\measuredangle C$ прав, тј. $\measuredangle C = R$, затим $\measuredangle A = \Pi(a')$, $\measuredangle B = \Pi(b')$, $BC = a$ и $AB = c$, доказати да је:

а) $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$;

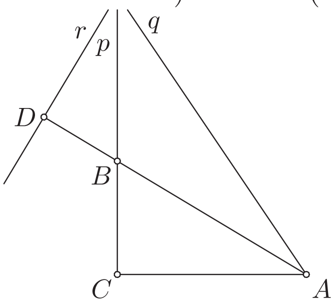
б) $\measuredangle A = \begin{cases} \Pi(c - b') - \Pi(b) & \text{, за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c) & \text{, за } b' > c \end{cases}$;

в) $\measuredangle A = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)\big] & \text{, за } b' > c \end{cases}$;

г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)\big] & \text{, за } b' > c \end{cases}$;

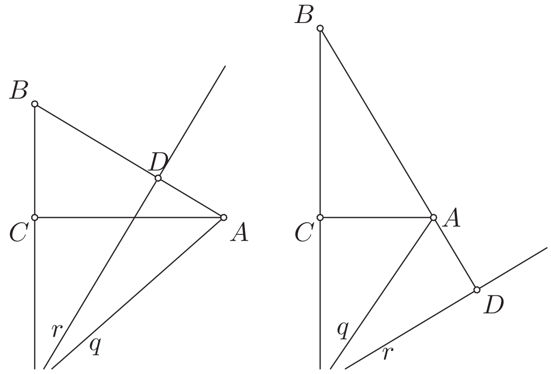
д) $\Pi(a' - b) + \Pi(a + b') = R, \quad \Pi(b' - a) + \Pi(b + a') = R.$

Решење: а) $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b')$



Означимо полуправу CB још са Cp. Нека је Aq полуправа с теменом A која је паралелна полуправој Cp. Тада је $\measuredangle CAq = \Pi(CA) = \Pi(b)$. Нека је r права управна на правој AB која је паралелна полуправима Cp, Aq (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка) и нека је D пресечна тачка правих r, AB. По дефиницији угла паралелности је $\measuredangle DBp = \Pi(DB)$, а како су углови $\measuredangle DBp$ и $\measuredangle ABC$ унакрсни, следи да је $\measuredangle B = \Pi(DB)$, односно да је $DB = b'$. Како је $AD = AB + BD = c + b'$, следи да је $\measuredangle DAq = \Pi(DA) = \Pi(c + b')$. Коначно, следи да је $\measuredangle A = \measuredangle CAq - \measuredangle DAq = \Pi(b) - \Pi(c + b')$.

б) $\measuredangle A = \begin{cases} \Pi(c-b') - \Pi(b) & \text{, за } b' < c \\ 2R - \Pi(b) - \Pi(b'-c) & \text{, за } b' > c \end{cases}$



Нека је Aq полуправа с теменом A која је паралелна полуправој BC. Тада је $\measuredangle CAq = \Pi(CA) = \Pi(b)$. Нека је r права нормална на правој BA која је паралелна полуправима BC, Aq (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је D пресечна тачка правих r, BA. Тада је, по дефиницији угла паралелности, $\measuredangle DBC = \Pi(DB)$. Како је $\measuredangle DBC = \measuredangle ABC$, следи да је $DB = b'$.

Ако је $b' < c$, онда важи $\mathcal{B}(B, D, A)$, па је $DA = BA - BD = c - b'$. Следи да је $\measuredangle DAq = \Pi(DA) = \Pi(c - b')$, па је $\measuredangle A = \measuredangle DAq - \measuredangle CAq = \Pi(c - b') - \Pi(b)$.

Ако је $b' > c$, онда важи $\mathcal{B}(B, A, D)$, па је $DA = DB - AB = b' - c$. Следи да је $\measuredangle DAq = \Pi(DA) = \Pi(b' - c)$. Како је $2R = \measuredangle DAB = \measuredangle DAq + \measuredangle CAq + \measuredangle CAB = \Pi(b' - c) + \Pi(b) + \measuredangle A$, следи да је $\measuredangle A = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$.

в) $\measuredangle A = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c-b') - \Pi(c+b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b'+c) + \Pi(b'-c)\big] & \text{, за } b' > c \end{cases}$

Ако је $b' < c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\measuredangle A = \Pi(c - b') - \Pi(c + b')$, тј. $\measuredangle A = \frac{1}{2}[\Pi(c - b') - \Pi(c + b')]$.

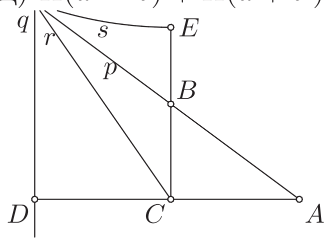
Ако је $b' > c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\measuredangle A = 2R - \Pi(b' + c) - \Pi(b' - c)$, тј. $\measuredangle A = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' + c) + \Pi(b' - c)]$.

г) $\Pi(b) = \begin{cases} \frac{1}{2}\big[\Pi(c+b') + \Pi(c-b')\big] & \text{, за } b' < c \\ R - \frac{1}{2}\big[\Pi(b'-c) - \Pi(b'+c)\big] & \text{, за } b' > c \end{cases}$

Ако је $b' < c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(c + b') = \Pi(c - b') - \Pi(b)$, па је $2\Pi(b) = \Pi(c + b') + \Pi(c - b')$, тј. $\Pi(b) = \frac{1}{2}[\Pi(c + b') + \Pi(c - b')]$.

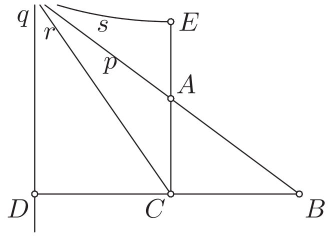
Ако је $b' > c$, онда је $\measuredangle A = \Pi(b) - \Pi(b' + c) = 2R - \Pi(b) - \Pi(b' - c)$, па је $2\Pi(b) = 2R - \Pi(b' - c) + \Pi(b' + c)$, тј. $\Pi(b) = R - \frac{1}{2}[\Pi(b' - c) - \Pi(b' + c)]$.

д) $\Pi(a'-b)+\Pi(a+b')=R, \quad \Pi(b'-a)+\Pi(b+a')=R$



Означимо полуправу AB још са Ap. Нека је q права која је нормална на правој AC и паралелна полуправој Ap (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је D пресечна тачка правих q, AC. Како нормала CB сече полуправу Ap (у тачки B), следи да важи $\mathcal{B}(A, C, D)$. Тада је $\Pi(DA) = \measuredangle DAp = \measuredangle CAB$, па је $DA = a'$. Следи да је $DC = DA - CA = a' - b$.

Нека је Cr полуправа с теменом C која је паралелна полуправој Ap и правој q. Тада је $\measuredangle DCr = \Pi(DC) = \Pi(a'-b)$. Нека је s права нормална на правој CB која је паралелна полуправима Ap, Cr (постојање и јединственост такве праве имамо на основу 11. задатка). Нека је E пресечна тачка правих CB, s. Како је $\measuredangle EBp$ угао паралелности, он мора бити оштар, па важи $\mathcal{B}(C, B, E)$ и $\Pi(EB) = \measuredangle EBp = \measuredangle CBA$, тј. $EB = b'$. Дакле, $EC = EB + BC = b' + a$. Како је Cr паралелна са s, следи да је $\measuredangle ECr = \Pi(EC) = \Pi(a+b')$. Коначно, како је $\measuredangle DCE = R$, следи да је $R = \measuredangle DCr + \measuredangle ECr = \Pi(a'-b) + \Pi(a+b')$.



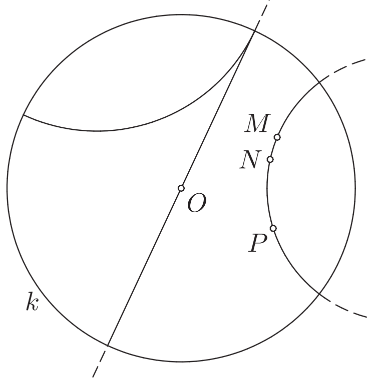
Потпуно аналогно се добија да важи $R = \Pi(b'-a) + \Pi(b+a')$.

9 Поенкареов диск модел

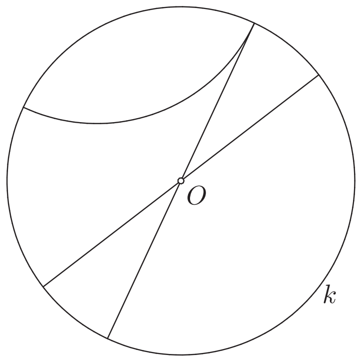
Када се заснива нека математичка теорија (нпр. еуклидска или хиперболичка геометрија), полази се од основних појмова, а односи међу њима се исказују аксиомама. Основни појмови било које теорије су апстрактни. Да би неки конкретни објекти могли бити реализација основних појмова неке теорије, неопходно је установити да ли такви објекти задовољавају све аксиоме те теорије. Уколико је одговор потврдан, за те конкретне објекте се каже да представљају *модел* те теорије.

Основни појмови геометрије (и еуклидске и хиперболичке) јесу непразан скуп **S**, који се зове простор и чији су елементи тачке, две врсте подскупова простора **S**, који се зову праве и равни, као и релације $\mathcal{B}$ и $\cong$. При томе је релација $\mathcal{B}$ тернарна над скупом тачака, а релација $\cong$ је бинарна над скупом уређених парова тачака. Модел еуклидске геометрије је неки непразан скуп с јасно назначеним подскуповима који су праве и равни и јасно дефинисаним релацијама $\mathcal{B}$ и $\cong$, уколико задовољавају све аксиоме инциденције, распореда, подударности и непрекидности, као и Плејферову аксиому. У овом поглављу нас интересује скуп који представља модел равни хиперболичке геометрије, при чему сматрамо да нам је дат неки модел еуклидске равни. Такав модел хиперболичке геометрије ћемо називати h–раван и све појмове назначаваћемо префиксом h.

Нека је k произвољан круг еуклидске равни и нека је O његов центар. Круг k се назива *апсолутом*, а његова унутрашњост (отворени диск) представља једну h–раван. Сама апсолута није у оквиру модела, тј. није део h–равни и сматра се да су на њој бесконачно далеке тачке. Тачке тог отвореног диска називамо h–тачкама. Отворене пречнике апсолуте, односно отворене тетиве круга k које садрже његов центар, као и отворене кружне лукове кругова који су управни на апсолути, чије су крајње тачке на апсолути, називамо h–правима. Дакле, h–праве су делови еуклидских правих ако садрже центар апсолуте, односно делови еуклидских кругова који су управни на апсолути, ако не садрже центар апсолуте. Може се доказати да су испуњене све аксиоме инциденције које се тичу равни.

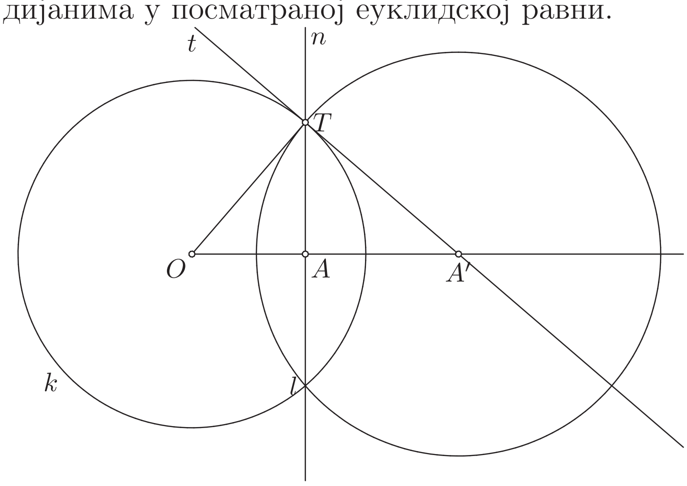


Ако две разне h–тачке припадају h–правој која је део еуклидске праве, онда еуклидска дуж која их спаја представља уједно и h–дуж. Ако две разне h–тачке M, P припадају h–правој која је део еуклидског круга, онда краћи лук $\widehat{MP}$ тог круга представља h–дуж MP. Три h–тачке M, N, P су у релацији h–између, тј. важи $\mathcal{B}_h(M, N, P)$, ако h–тачка N припада отвореној h–дужи MP. Може се доказати да су испуњене све аксиоме распореда. Помоћу релације h–између дефинисани су и појмови h–полуправих, h–углова, h–троуглова итд. Из аксиома непрекидности за еуклидске праве и њихових последица за еуклидски круг следи да важе аксиоме непрекидности за h–праве. Може се доказати да у h–равни постоје h–права и h–тачка која јој не припада такве да постоји више од једне h–праве која садржи ту h–тачку, а с том h–правом нема заједничких тачака. Према томе, испуњена је и аксиома Лобачевског. Две h–праве су h–паралелне ако се додирују у тачки која припада апсолути. Ако су две h–праве дисјунктне и нису h–паралелне, онда су оне h–хиперпаралелне.



Преостаје још да се дефинише h–подударност парова h–тачака. За то је довољно дефинисати пресликавања h–равни у себе (пресликавања која сликају унутрашњост апсолуте k у себе) које ће представљати h–изометрије. Као што знамо, свака изометрија равни (било еуклидске, било хиперболичке) може се представити као композиција највише трију осних рефлексија, па је довољно дефинисати осне рефлексије h–равни, тј. h–рефлексије. Ако је h–права p део еуклидске праве (означимо је такође са p), дефинишимо h–рефлексију $\mathcal{S}^h_p$ као рестрикцију еуклидске осне рефлексије $\mathcal{S}_p$ на тачке h–равни, односно на унутрашњост апсолуте k. Ако је, пак, h–права p део еуклидског круга (означимо га такође са p), дефинишимо h–рефлексију $\mathcal{S}^h_p$ као рестрикцију еуклидске инверзије ψ_p на тачке h–равни, односно на унутрашњост апсолуте k. Ово је сасвим природна дефиниција, јер је инверзија, на неки начин, рефлексија у односу на круг. Парови тачака $(A, B), (C, D)$ су h–подударни, односно важи $(A, B) \overset{h}{\cong} (C, D)$, ако постоји коначно много h–рефлексија $\mathcal{S}^h_{p_1}, \ldots, \mathcal{S}^h_{p_n}$ таквих да је $C = \mathcal{S}^h_{p_n} \circ \cdots \circ \mathcal{S}^h_{p_1}(A)$ и $D = \mathcal{S}^h_{p_n} \circ \cdots \circ \mathcal{S}^h_{p_1}(B)$. Може се доказати да су испуњене све аксиоме подударности, према томе, имамо један модел хиперболичке равни, који се назива *Поенкареовим диск моделом.*

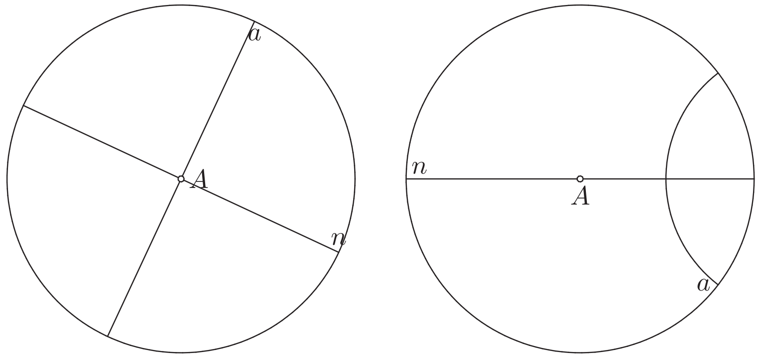
Што се мере дужи тиче, h–дужина h–дужи није једнака еуклидској дужини одговарајуће еуклидске дужи или еуклидског кружног лука. Пошто еуклидске осне рефлексије и еуклидске инверзије чувају еуклидске углове између кривих, следи да су два h–угла h–подударна ако и само ако су углови које граде одговарајући еуклидски кругови или еуклидске праве међусобно подударни. Није тешко доказати да је h–угао између неких h–правих прав ако и само ако је одговарајући угао између еуклидских кругова или еуклидских правих такође прав, па се h–мера h–углова у степенима или радијанима поклапа с мером углова у степенима или радијанима у посматраној еуклидској равни.



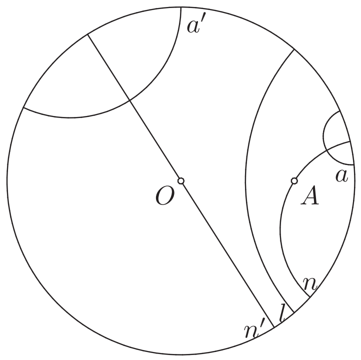
Веома је корисна чињеница да су h–праве које садрже центар апсолуте делови еуклидских правих, па је веома значајно за произвољну тачку A пронаћи h–изометрију која је слика у центар апсолуте O. Довољно је наћи h–рефлексију, јер знамо да нађемо слике тачака, еуклидских правих и еуклидских кругова при еуклидским рефлексијама и еуклидским инверзијама. Конструишимо еуклидску нормалу n на OA у тачки A, означимо једну од њених пресечних тачака са апсолутом са T и конструишимо тангенту t на апсолути k у тачки T. Њен пресек с полуправом OA означимо са A'. Круг $l(A', A'T)$ има особину да му центар припада тангенти апсолуте k, па је ортогоналан на апсолути, што значи да је његов пресек с унутрашњошћу апсолуте h–права, коју ћемо исто означити са l. Троуглови $\triangle A'AT, \triangle A'TO$ имају заједнички угао код темена A' и подударне праве углове $\measuredangle A'AT, \measuredangle A'TO$, па су слични. Следи да је $\frac{A'A}{A'T} = \frac{A'T}{A'O}$, тј. да је $A'A \cdot A'O = A'T^2$, па је $\psi_l(A) = O$, што значи да је и $\mathcal{S}_l^h(A) = O$, Овиме је одређена h–права l таква да се h–рефлексијом $\mathcal{S}_l^h$ h–тачка A слика у центар апсолуте O. Ова конструкција нам је веома важна, јер ће се користити у већини задатака.

1. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h-права a и h-тачка A. Одредити h-праву n која садржи тачку A и управна је на праву a.

Решење:



$1°$ Нека се h–тачка A поклапа с центром апсолуте. Тада h–права n коју треба да конструишемо садржи центар апсолуте, па је део еуклидске праве. Потребно је да она буде управна на h–правој a, па ако је h–права a део еуклидске праве, конструишимо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на правој која садржи h–праву a, а ако је h–права a део еуклидског круга, конструишимо еуклидску праву која садржи тачку A и нормална је на кругу који садржи h–праву a, тј. еуклидску праву која садржи тачку A и центар круга који садржи h–праву a.

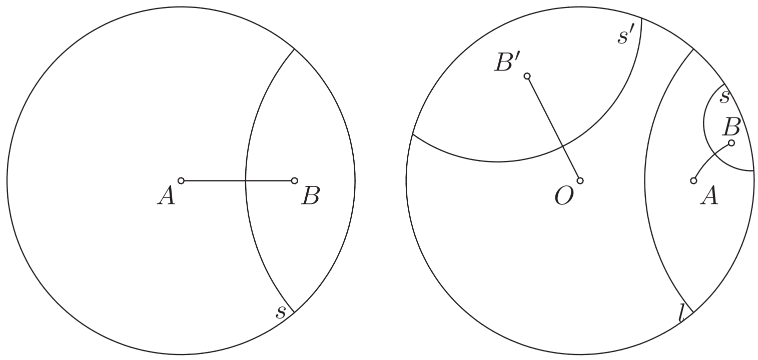


$2°$ Нека се h–тачка A разликује од центра апсолуте O. Конструишимо h–праву l такву да се h–рефлексијом у односу на њу h–тачка A слика у центар апсолуте O (конструкција је описана у уводном делу). Конструишимо h–праву a' која је слика h–праве a при h–рефлексији у односу на h–праву l (слика еуклидске праве или круга при еуклидској инверзији). Дакле, h–рефлексијом у односу на h–праву l пресликали смо h–тачку A у центар апсолуте O и h–праву a у h–праву a' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–праву n'

која садржи h–тачку O и управна је на h–правој a', као у првом случају. Пошто су h–рефлексије инволуције, поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву l се h–тачка O и h–права a' сликају редом у h–тачку A и h–праву a, а пошто су h–рефлексије уједно и h–изометрије, применом h–рефлексије у односу на h–праву l се h–права n' слика у h–праву n која садржи h–тачку A и нормална је на h–правој a.

2. У Поенкареовом диск моделу дате су h-тачке A и B. Одредити h-симетралу дужи AB.

Решење: $1°$ Нека се једна од h–тачака A, B поклапа с центром апсолуте (нека је то, без умањења општости, h–тачка A). У уводном делу смо видели како се конструише h–права s таква да се h–рефлексијом у односу на њу h–тачка B слика у центар апсолуте A. Но, приметимо да је та h–права s управо h–симетрала h–дужи AB, те управо њу треба конструисати.

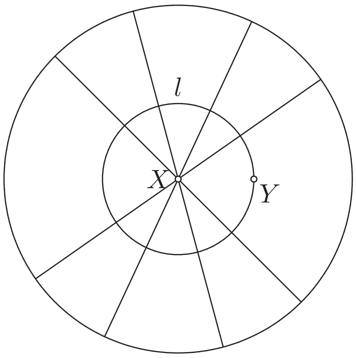


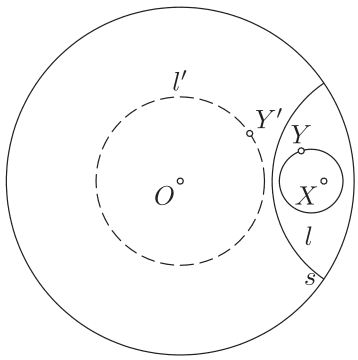
$2°$ Нека се h–тачке A, B разликују од центра апсолуте O. Конструишимо h–симетралу l h–дужи OA и означимо са B' слику h–тачке B при h–рефлексији у односу на h–праву l (слика тачке при еуклидској инверзији). Дакле, h–рефлексијом у односу на h–праву l пресликали смо h–тачке A, B у центар апсолуте O и h–тачку B' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–симетралу s' h–дужи OB'. Поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву l сликамо h–тачке O, B' у h–тачке A, B, а h–симетралу s' h–дужи OB' у h–симетралу s h–дужи AB.

3. У Поенкареовом диск моделу дате су тачке X и Y. Конструисати h-круг l са центром у тачки X који садржи тачку Y.

Решење: Ако је $\mathcal{X}$ елиптички прамен правих са средиштем X, онда је круг с центром X, који садржи тачку Y, епицикл одређен праменом $\mathcal{X}$ и тачком Y, тј. скуп свих тачака које се од тачке Y добијају осним рефлексијама у односу на праве прамена $\mathcal{X}$.

1° Нека се h–тачка X поклапа с центром апсолуте. Тада су h–праве елиптичког прамена $\mathcal{X}$ с h–средиштем X делови еуклидских правих, па су h–рефлексије одређене h–правима прамена $\mathcal{X}$ рестрикције еуклидских осних рефлексија. Тачке h–круга l се добијају h–рефлексијама h–тачке Y у односу на h–праве прамена $\mathcal{X}$, тј. еуклидским осним рефлексијама у односу на еуклидске праве прамена $\mathcal{X}$, па следи да се h–круг l поклапа с еуклидским кругом $l(X, XY)$.

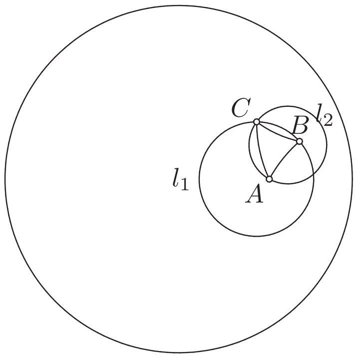




2° Нека се h–тачка X разликује од центра апсолуте O. Конструишимо h–симетралу s h–дужи OX и затим означимо са Y' слику h–тачке Y при h–рефлексији у односу на h–праву s. Дакле, h–рефлексијом у односу на h–праву s пресликали смо h–тачке X, Y у центар апсолуте O и h–тачку Y' и тиме смо проблем свели на онај који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–круг l' с h–центром O који садржи h–тачку Y'. Поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву s сликамо h–тачке O, Y' у h–тачке X, Y, а h–круг l' у h–круг l с h–центром X који садржи h–тачку Y.

4. У Поенкареовом диск моделу хиперболичке равни дате су h-тачке A и B. Конструисати h-тачку C такву да је h-троугао ABC правилан.

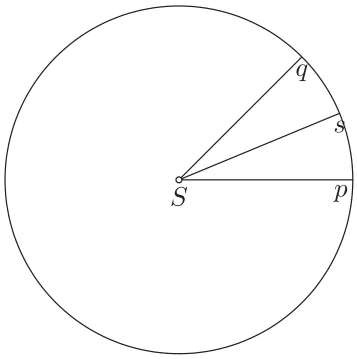
Решење:

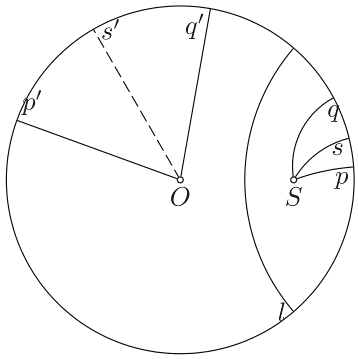


Искористимо решење претходног задатка и конструишимо h–круг l_1 с h–центром A који садржи h–тачку B и h–круг l_2 с h–центром B који садржи h–тачку A. Једну од пресечних h–тачака h–кругова l_1, l_2 означимо са C. Тада је h–троугао $\triangle ABC$ правилан, јер h–тачка C припада h–кругу l_1, па важи $AC \overset{h}{\cong} AB$, а пошто припада и кругу l_2, важи $BC \overset{h}{\cong} BA$ (у питању је h–подударност h–дужи).

5. У Поенкареовом диск моделу дате су две праве које се секу. Одредити h-бисектрису угла којег одређују.

Решење: Означимо са S пресек датих h–правих p, q.
1° Нека се h–тачка S поклапа с центром апсолуте. Тада су h–праве p, q делови еуклидских правих и h–угао $\measuredangle pSq$ се поклапа с еуклидским углом $\measuredangle pSq$. Бисектриса угла је полуправа која припада том углу таква да се осном рефлексијом у односу на праву која је садржи један крак тог угла слика у други и обрнуто. Ако је Ss еуклидска бисектриса еуклидског угла $\measuredangle pSq$, онда се еуклидском осном рефлексијом у односу на праву која је садржи крак Sp слика у крак Sq и обрнуто. Како h–рефлексија у односу на h–праву која садржи бисектрису Ss делује исто као и еуклидска осна рефлексија, следи да се и h–рефлексијом у односу на h–праву која садржи Ss h–крак Sp слика у h–крак Sq и обрнуто, односно да је h–полуправа Ss тражена h–бисектриса.

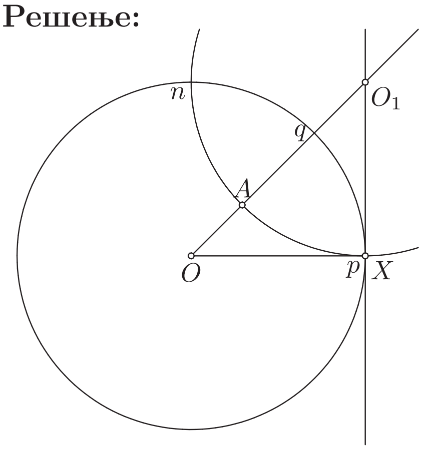




2° Претпоставимо сада да се h–тачка S разликује од центра апсолуте O. Конструишимо h–симетралу l h–дужи OS и означимо са p', q' слике h–правих p, q при h–рефлексији у односу на h–праву l. Дакле, свели смо проблем на претходни, који умемо да решимо. Према томе, конструишимо h–бисектрису Os' h–угла $\measuredangle p'Oq'$. Поновном применом h–рефлексије у односу на h–праву l сликамо h–праве p', q' у h–праве p, q, а h–бисектрису Os' h–угла $\measuredangle p'Oq'$ у h–бисектрису Ss h–угла $\measuredangle pSq$.

6. У Поенкареовом диск моделу конструисати h-дуж мере $\Pi^{-1}(\frac{R}{2})$.

Решење:



Потребан нам је h–угао $\frac{R}{2}$, па конструишимо h–угао $\measuredangle pOq$ такав да му теме буде центар апсолуте (тада су му краци делови еуклидских правих). Да бисмо добили h–дуж h–мере $\Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$, потребна нам је h–права која је управна на једном h–краку тог h–угла (нпр. Oq), а h–паралелна с његовим другим h–краком (нпр. Op). Та h–права не може садржати центар апсолуте, јер онда неће бити паралелна ни са једном краком угла, па следи да мора припадати еуклидском кругу чији се (еуклидски) центар налази на еуклидској правој која садржи крак Oq. Тај еуклидски круг мора садржати тачку X у пресеку апсолуте и полуправе Op, да би h–права коју он садржи била h–паралелна с h–краком Op. Такође, тај круг мора бити управан на апсолути у тачки X, па следи да његов центар припада тангенти апсолуте у тачки X. Дакле, центар O_1 тог круга налази се у пресеку те тангенте и (еуклидске) полуправе Oq, па конструишимо круг $n(O_1, O_1X)$. Означимо са A h–тачку у пресеку h–праве n и h–крака Oq. Тада је OA h–дуж која је, по дефиницији функције Лобачевског, h–мере $\Pi^{-1}(\measuredangle AOp) = \Pi^{-1}(\measuredangle pOq) = \Pi^{-1}\left(\frac{R}{2}\right)$.